Apellido y nombres: **Dimanosaurius**
Padrón: *Un gran padrón* Correo electrónico: *Un gran correo electronico*
Cursada. Cuatrimestre: *Un buen cuatri* Año: *un gran año* Profesor: *Un gran profesor*

Una gran NOTA ! :D

Análisis Matemático III.

Examen Integrador. Cuarta fecha. 26 de julio de 2018.

1		2		3		4	
a	b	a	b	a	b	a	b

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de al menos 4(cuatro) ítems, entre los cuales debe figurar uno del ejercicio 1 o del 2 y uno del ejercicio 3 o del 4.

Ejercicio 1.

(a) Sea $f(z) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{z}\right) - 1$. Probar que existe una sucesión $(z_n)_{n\geqslant 0}$ tal que $z_n \to 0$ y $f(z_n) = 0$ para todo $n \geqslant 0$ pero f no es idénticamente nula. ¿Contradice esto el Principio de Identidad (o de los Ceros Aislados)?

(b) Estudiar la convergencia y calcular $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$, aplicando variable compleja.

Ejercicio 2.

(a) Probar que la serie trigonométrica de Fourier de $g(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x & -\pi \leqslant x < 0 \\ 0 & 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$ en $[-\pi, \pi]$ está dada por $-\dfrac{\operatorname{sen} x}{2} + \dfrac{1}{\pi} - \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{(2k-1)(2k+1)}$.

(b) Deducir la convergencia y calcular el valor de cada una de las series:

$$i)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)(2k+1)}, \qquad ii)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2(2k+1)^2}$$

Ejercicio 3.

(a) Probar que $\mathcal{F}[f(ax+b)](w) = \dfrac{1}{|a|}e^{iw\frac{b}{a}}\mathcal{F}[f](\dfrac{w}{a}) \quad (a \neq 0)$.

(b) Hallar una expresión para $u(x,t)$ sabiendo que

$$\begin{array}{ll} u(x+1,t) - 2u(x,t) + u(x-1,t) = u_t(x,t) & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & -\infty < x < +\infty \end{array}$$

con $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$.

Ejercicio 4.

(a) Resolver:

$$y_{(x)} + \int_0^x Ch(x-t)\left(\int_0^t y(\tau)\,d\tau\right) dt = e^x$$

(b) Demostrar que si f es una función periódica con período p y continua a trozos para $t \geqslant 0$ entonces existe la transformada de Laplace de f y está dada por

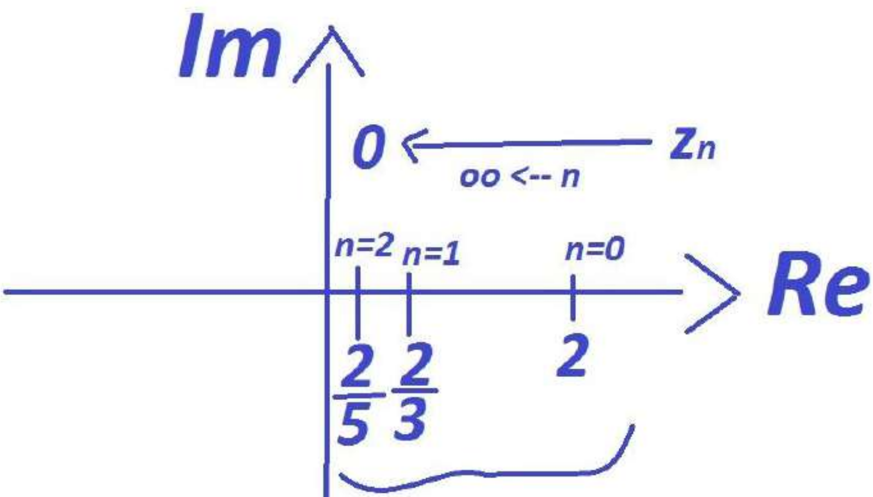
$\mathcal{L}[f](s) = \dfrac{1}{1-e^{-ps}}\displaystyle\int_0^p e^{-st} f(t)\,dt$. ¿Cuál es su región de convergencia?

Dimanosaurius

1.a)

$$z_n = \frac{2}{2n+1} \in R$$

$$f(z_n) = sen^2\left(\frac{\pi(2n+1)}{2}\right) - 1 = 0$$



Cada z_n es aislado por lo que no contradice el ppio. de ceros aislados

Dimanosaurius

1 b

$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx$ ~~como no hay problemas de convergencia~~

V(0)

$\frac{x^2}{1+x^4} \underset{x \ll 1}{\sim} x^2 \;/\; \int_0^1 x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1$ que converge

$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{1+x^4}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left|\frac{1}{1+x^4}\right| = 1 \neq \begin{cases}\infty \\ 0\end{cases}$

$\therefore \int \frac{x^2}{1+x^4}\, dx < \infty \iff \int x^2\, dx < \infty$

por criterio de comparación

V(∞)

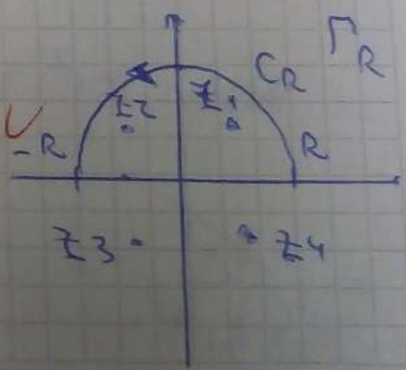
$\frac{x^2}{1+x^4} \underset{x \gg 1}{\sim} \frac{1}{x^2} \;/\; \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \left(-\frac{1}{1}\frac{1}{x}\right)\Big|_1^{+\infty}$ que converge

$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{1+x^4}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{1+x^4} = 1 \neq \begin{cases}\infty \\ 0\end{cases}$

$\therefore \int_1^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx < \infty \iff \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx < \infty$

$\therefore$ la integral converge.

$\int_0^{+\infty} \left|\frac{x^2}{1+x^2}\right| dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{z^2}{1+z^4}\, dz$



$\cancel{1+z^4 = 0}$

$\cancel{z^4 = -1}$

$\cancel{|z| = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{i^2} = i^{1/2}}$

$\cancel{e^{i\theta} = e^{\frac{\pi}{4} + \frac{2}{4}k\pi}}$

$z = \sqrt[4]{-1}$, $z = |z| e^{i\theta}$

$|z| = |-1|^{1/4}$

$\theta = \frac{\operatorname{Arg}(-1) + 2k\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

$k=0 \quad \frac{\pi}{4}$

$k=1 = \frac{3}{4}\pi$

$k=2 = \frac{5}{4}\pi$

$k=3 = \frac{7}{4}\pi$

$\Rightarrow z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

$z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$

$z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)$

$z_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

Teorema de Residuos

z_1, z_2 pertenecientes al interior de Γ_R.

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_R} \frac{z^2}{1+z^4}\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx + \underbrace{\int_{C_R} \frac{z^2}{1+z^2}\,dz}_{I_R} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{1+z^4}\right)$$

$$I_R: \left|\int_{C_R} \frac{z^2}{1+z^4}\,dz\right| \leq \int_{C_R} \frac{|z|^2}{|1+z^4|}\,|dz| \leq \int_{C_R} \frac{|z|^2}{||z|^4-1|}\,|dz|$$

$|1+z^4| \geq ||z|^4 - 1|$

$$\leq \frac{R^2}{|R^4-1|}\pi \cdot R \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$|z| = R$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{1+z^4}, z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right) = \lim_{z\to z_1} \frac{(z-z_1)\,z^2}{1+z^4}$$

polo simple

$$= z_1^2 \lim_{z\to z_1} \frac{(z-z_1)}{1+z^4} = z_1^2 \lim_{z\to z_1} \frac{1}{4z^3}$$

L'H

$$= \frac{\cancel{z_1^2}}{4z_1^3} = \frac{1}{4z_1} = \frac{1}{\frac{4}{\sqrt{2}}(1+i)}$$

$*1$

Dimanosaurius

$$\text{Res}\left[\frac{z^2}{1+z^4},\ z_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)\right]=\frac{1}{4z_2}=\frac{1}{4\frac{(-1+i)}{\sqrt{2}}}$$

idem $(*^1)$

$$\Rightarrow 2\pi i\left(\frac{\sqrt{2}}{4(-1+i)}+\frac{\sqrt{2}}{4(1+i)}\right)$$

$$=2\pi i\,\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\overbrace{-1+i-1+i}^{=+1}}{\underbrace{-1+i^2}_{(-2)}}\right)=\pi i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2i}{-2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

$\therefore$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\,dx=\lim_{R\to\infty}\left(\int_{\Gamma_R}\frac{z^2}{1+z^4}\,dz\right)=\lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{R}\frac{x^2}{1+x^4}\,dx+\int_{C_R}\frac{z^2}{1+z^4}\,dz\right)$$

$$=\lim_{R\to\infty}\left(2\pi i\,\text{Res}\left[\frac{z^2}{1+z^4},\ z_k\in\text{int}(\Gamma_R)\right]\right)$$

$$=\lim_{R\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right)$$

$$\boxed{\therefore \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\,dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi}$$

NOTA

Dimanosaurius

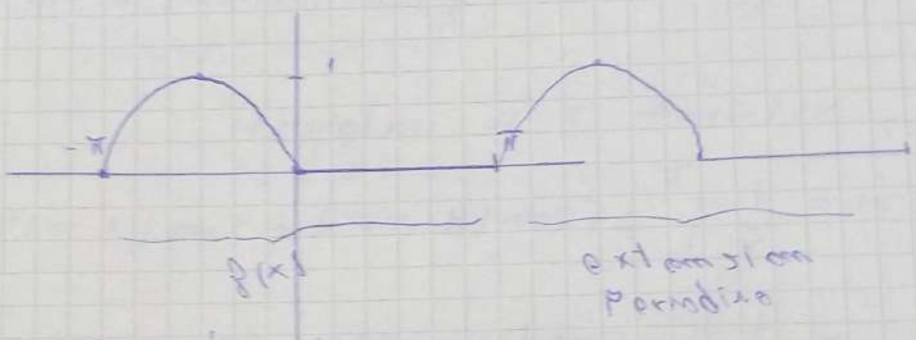
4/10

2

2 Probar serie trigonométrica de Fourier de

$$g(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen}(x) & -\pi \le x < 0 \\ 0 & 0 \le x \le \pi \end{cases} \quad \text{en } [-\pi, \pi]$$

Esta dada por: $-\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{2} + \dfrac{1}{\pi} - \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2nx)}{(2n-1)(2n+1)}$



Tras analizar el gráfico:
g(x) es continua en $[-\pi, \pi]$, especificamente es generalmente ~~continua~~

=> Admite desarrollo en serie de Fourier:

$$g(x) \cong \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right)$$

Calculo los coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (g(x))\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-\operatorname{sen}(x))\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{-\pi} (\operatorname{sen}(x))\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\cos(x)\Big|_0^{-\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(-(-1) - (-1)\right) = +\frac{2}{\pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi}}$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(mx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\operatorname{sen}(x)\cos(mx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}(x)\cos(mx)\,dx$$

$$\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\beta) = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)]$$

con $\alpha = x$, $\beta = mx$ $\Big\{$ $= \frac{1}{2}\{\operatorname{sen}(x+mx) + \operatorname{sen}(x-mx)\}$

$$= \frac{1}{2}[\operatorname{sen}[(1+m)x] + \operatorname{sen}((1-m)x]\}$$

$\Rightarrow$ volviendo a la integral:

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}[\operatorname{sen}((1+m)x) + \operatorname{sen}((1-m)x)]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos[(1+m)x]}{(1+m)} - \frac{\cos[(1-m)x]}{(1-m)}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[-\left(\frac{\cos[\pi+m\pi]}{(1+m)} - \frac{\overbrace{\cos(0)}^{=1}}{1+m}\right) - \left(\frac{\overbrace{\cos(\pi-m\pi)}^{(-1)^{m+1}}}{(1+m)} - \frac{\overbrace{\cos(0)}^{=1}}{1-m}\right)\right]$$

El menos (-1) de $(-\pi)$, no esta porque los cos es par

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\overbrace{(-1)(-1)^{m+1}}^{(-1)^{m+2} = (-1)^m}}{(1+m)} + \frac{1}{1+m} + \frac{(-1)(-1)^{m+1}}{(1-m)} + \frac{1}{1-m}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{(-1)^m + 1}{(1+m)} + \frac{(-1)^m + 1}{(1-m)}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\underbrace{((-1)^m + 1)}\left(\frac{\overbrace{1-m+1+m}^{=2}}{(1+m)(1-m)}\right)$$

$= 0$ m impar

$= 2$ m par

Dimanosaurius

5/10

=> [illegible]

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \cdot \frac{2}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{(2n+1)(2n-1)}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,\operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-\operatorname{sen}(x).\operatorname{sen}(nx))dx$$

impar impar

=> par

$$= -\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(x).\operatorname{sen}(nx))dx$$

f. par

$= 0 \quad \forall n \neq 1$

$= \pi \quad n = 1$

$$\Rightarrow b_{n=1} = -\frac{\pi}{2\pi} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ g(x) \simeq \frac{1}{\pi} - \frac{\operatorname{sen}(x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\cos(2nx)}{(2n+1)(2n-1)}$$

Reescrito con $n = k$

$$g(x) \simeq -\frac{\operatorname{sen}(x)}{2} + \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{(2k+1)(2k-1)}$$

Dimanosaurius

2.b)

Por criterio de comparación:

$$\left|\frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)}\right| \leq \left|\frac{2}{\pi}\,\frac{4}{(2n+1)(2n-1)}\right| = \underbrace{|a_n|}_{\text{coeficiente de Fourier de la parte anterior}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge porque es coeficiente de Fourier

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)}\right| \text{ converge}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)} \text{ converge}$$

Sigue en siguiente hoja, después de la parte ii)

Dimanosaurius

6/10

$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\, dx = \int_{-\pi}^{0} |-\operatorname{sen}(x)|\, dx =$

$= -(\cos(x))\Big|_{-\pi}^{0} = 1-(-1) = 2 < \infty$

$\therefore g(x) \in L^2$

$\Rightarrow$ por teorema de parseval

$\|g(x)\|^2 = \pi \left(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} |a_m| + |b_m| \right)$

$2 = \pi \left(\frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2(2n-1)^2} \right)$

$|a_0|^2 = \left|\frac{2}{\pi}\right|^2 = \frac{4}{\pi^2}$

$|b_1|^2 = \left|\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}$

$|b_n|^2 = \left|\frac{2}{\pi} \frac{1}{(2n+1)(2n-1)}\right|^2 \Rightarrow \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{(2n+1)^2(2n-1)^2}$

$\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2(2n-1)^2} = \left(\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi^2} - \frac{1}{4} \right) \frac{\pi^2}{4}$

$$\boxed{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\pi} - \frac{\pi^2}{16}}$$

$\therefore$ converge

Ademas,

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{(2n+1)^2(2n-1)} \right| < \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} \right|$

(2) (1)

Analogamente, como (1) CV $\Rightarrow$ (2) CV

Por criterio de comparacion

i) continuación

Por el gráfico realizado inicialmente sabemos que la serie de Fourier ~~[illegible]~~ converge al valor de la función en $x = \pi$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 = -\frac{\overbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{=1}}{2} + \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\overbrace{\cos\left(2k\frac{\pi}{2}\right)}^{=(-1)^k}}{(2k-1)(2k+1)}$$

$\Rightarrow$

$$0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)(2k+1)}$$

$\therefore$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)(2k+1)} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\right)\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}}$$

Dimanosaurius

7 / 10

3/2

$$\mathcal{F}\{f(ax+b)\}(w) = \frac{1}{|a|} e^{iw\frac{b}{a}} \mathcal{F}\{f\}\left(\frac{w}{a}\right)$$

$$\mathcal{F}\{f(ax+b)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax+b)\, e^{-iwx}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-iw\left(\frac{u-b}{a}\right)} \frac{du}{a}$$

Tomo cambio de variables:

$u = (ax+b) \iff x = \frac{u-b}{a} \quad a \neq 0$

$du = a\,dx \iff \frac{du}{a} = dx$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-iw\frac{u}{a}} \cdot \underbrace{e^{+iw\frac{b}{a}}}_{= ctc} du$$

$$= e^{iw\frac{b}{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cdot e^{-i\frac{w}{a}u}\, du$$

$$= \boxed{e^{iw\frac{b}{a}} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{w}{a}\right)}$$

Por teorema de traslación:

$$\mathcal{F}\{f(ax)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{w}{a}\right) \quad a \neq 0$$

6

u(x,t) /

$$u(x+1,t) - 2u(x,t) + u(x-1,t) = u(x,t) \quad (1)$$

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \iff -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2)$$

Tomo: $\mathcal{F}\{u(x,t)\} = U(w,t)$

$\Rightarrow$ Transformo (1) (Aplicando propiedad demostrada en la parte a)

Dimanosaurius

$$\mathcal{F}\{u(x+1,t)\} = \frac{1}{|1|} e^{iw\frac{1}{1}} U\left(\frac{w}{1},t\right) = e^{iw} U(w,t)$$

a=1 b=1

$$\mathcal{F}\{u(x-1,t)\} = \frac{1}{|1|} e^{iw\frac{-1}{1}} U\left(\frac{w}{1},t\right) = e^{-iw} U(w,t)$$

$$\mathcal{F}\{-2u(x,t)\} = -2U(w,t)$$

$$\mathcal{F}\{u_t(x,t)\} = U(w,t)'_t$$

$\Rightarrow$

$$e^{iw} U(w,t) - 2U(w,t) + e^{-iw} U(w,t) = U'_t(w,t)$$

$$U(w,t)\Big[\underbrace{e^{iw} + e^{-iw}}_{= 2\cdot\underbrace{\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}}_{=\cos(w)}} - 2\Big] = U'_t(w,t)$$

$\Leftrightarrow U(w,t)\,(\cos(w) - 2) = U'_t(w,t)$

Propongo $U(w,t) = \underbrace{A}_{=cte} e^{(\cos(w)-2)t}$

$$U'_t = \underbrace{A e^{(\cos(w)-2)t}}_{=U(w,t)} \cdot (\cos(w)-2)$$

Transformo la condición ②:

$$\mathcal{F}\{u(x,0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-iwx}\, dx = \int_{-1}^{1} 1\, e^{-iwx}\, dx$$

$$= \left.\frac{e^{-iwx}}{-iw}\right|_{-1}^{1} = \frac{e^{-iw}}{-iw} - \frac{e^{iw}}{-iw} = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{iw}$$

$= U(w,0)$

Dimanosaurius

8 /10

$\Rightarrow \upsilon(w,0) = A(w)\underbrace{e^{(\cos(w)-2)\cdot 0}}_{\to 1} = A(w) = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{iw}$

$\Rightarrow \upsilon(w,t) = \left(\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{iw}\right) \cdot e^{(\cos(w)-2)t}$ cumple ① y ②

$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\{\upsilon(w,t)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \upsilon(w,t)\, e^{iwx}\, dw$

Aprovecho este espacio en blanco decirles unas cosas, jovenes:

Nunca se queden con dudas
=> Pregunten todo lo que no terminan de entender sin importar cuan "tonto" crean que sea. (Yo no creo en las preguntas tontas).

Estudien mucho, pero recuerden divertirse mientras lo hacen.

Animo, y suerte en los examenes asi como en el resto de la carrera.

Saludos,

Dimanosaurius

Dimanosaurius

9 [redacted] /10

4) a)

$$y(x) + \int_0^x \underbrace{ch(x-t)\Big(\int_0^t y(\tau)\underbrace{\,d\tau}_{*1(t-\tau)}\Big)dt}_{y*1} = e^x$$

$$= ch * \int_0^t y(\tau)\,(x)$$ [redacted]

transformo con Laplace / $\mathcal{L}\{y(x)\} = Y(s)$

[redacted]

$$\mathcal{L}\{y(x)\} + \mathcal{L}\{ch*(y*1)_{(x)}\} = \mathcal{L}\{e^x\}$$

$\Rightarrow$ por propiedad de transformada de la convo- -lución

$$\mathcal{L}\{Y(x)\} + \mathcal{L}\{ch(x)\}\,\mathcal{L}\{y*1\} = \mathcal{L}\{e^x\}$$

$$= \mathcal{L}\{y(x)\} + \mathcal{L}\{ch(x)\}\,\mathcal{L}\{y\}\{\mathcal{L}\{1\}\} = \mathcal{L}\{e^x\}$$

$$Y(s) + \left(\frac{s}{s^2-1}\right)Y(s)\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{(s-1)}$$

$$\Rightarrow Y(s)\underbrace{\left(1 + \frac{1}{s^2-1}\right)}_{\frac{s^2\cancel{-1}\cancel{+1}}{s^2-1}} = \frac{1}{(s-1)}$$

NOTA

Dimanosaurius

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{s^2-1}{s^2(s-1)} = \frac{(s+1)(s-1)}{s^2(s-1)} = \frac{s}{s^2} + \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$$

Invierto para hallar $y(x)$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{Y}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}$$

$$y(x) = H(x) + xH(x)$$

$$\boxed{y(x) = H(x)(1+x)}$$

b

f periodica con periodo p ~~...~~

f continua a trozos $(t \geq 0)$

$\Rightarrow \exists\ \mathcal{L}\{f\}$ y vale: $\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{1}{1-e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t)\,dt$

si f es continua a trozos

$\Rightarrow f$ es de orden exponencial $/ |f(t)| \leq M e^{ct}$

$M, c > 0$

$\Rightarrow \exists\ \mathcal{L}\{f\}$

$$\mathcal{L}\{f_p(t)\} = \int_0^{+\infty} f_p(t) \cdot e^{-st}$$

El resto de la demostracion la pueden googlear o leer de algun libro. :D (y la completan ustedes mismos)